PUISSANCES ET RACINES - REGLES DE CALCUL

Cherchons à calculer le **produit de puissances** différentes d'un même nombre :

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times ... a}_{\text{m fois}} \times \underbrace{a \times a \times ... a}_{\text{n fois}} = \underbrace{a \times a \times ... a}_{\text{m+n fois}} = a^{m+n}$$

retenons que $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Par exemple :

$10^2 \times 10^3 = 100 \times 1\,000 = 100\,000$
$= 10^5 = 10^{2+3}$

Calculons maintenant le **quotient de puissances** différentes d'un même nombre:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times ... a \text{ (m fois)}}{a \times a \times ... a \text{ (n fois)}}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times ... a \text{ (m fois)}}{a \times a \times ... a \text{ (n fois)}} = a^{m-n}$$

après simplification.

Si m > n, l'exposant est positif,
si m = n, l'exposant est nul et le rapport vaut 1
si m < n, l'exposant est négatif.

Par exemple :

$$\frac{10^5}{10^3} = \frac{100\,000}{1000} = 100 = 10^2 = 10^{5-3}$$

$$\frac{10^2}{10^5} = \frac{100}{100\,000} = \frac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3}$$

Notons au passage que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

et retenons que $\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$

Nous pouvons désormais écrire toutes les puissances d'un nombre, par exemple 10, sous une forme unique :

...
$10^3 = 1\,000$
$10^2 = 100$
$10^1 = 10$
$10^0 = 1$
$10^{-1} = 1 / 10 = 0,1$
$10^{-2} = 1 / 100 = 0,01$
$10^{-3} = 1 / 1\,000 = 0,001$
...

Cherchons enfin à calculer la **puissance d'une puissance** :

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a \times ... a}_{\text{m fois}} \times \underbrace{a \times ... a}_{\text{m fois}} \times ... \underbrace{a \times ... a}_{\text{m fois}}}_{\text{n fois}} = \underbrace{a \times ... a}_{\text{m×n fois}}$$

Il en résulte que $(a^m)^n = a^{mn}$

Par exemple :

$(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^{3x2} = 2^6$

Cette dernière formule nous permet de noter autrement les racines d' un nombre, car si les exposants sont tels que m = 1/n, il en résulte que mn = 1 et l' on peut alors écrire :

$$(a^{1/n})^n = a^1 = a$$

$a^{1/n}$ n' est autre que la racine nième de a,

d' où $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

Par exemple :

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} = 2^{0,5} \approx 1,414$$